ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

--------------✍📖✍-------------

ĐINH HỒNG CHINH

VỀ MỘT VÀI MỞ RỘNG MỚI CỦA DÃY FIBONACCI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐINH HỒNG CHINH

VỀ MỘT VÀI MỞ RỘNG MỚI CỦA DÃY FIBONACCI

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. NÔNG QUỐC CHINH

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Bảng ký hiệu

$\mathbb{N}$	tập hợp các số tự nhiên
$\mathbb{Z}_{\geq 0}$	tập hợp các số nguyên không âm
$\mathbb{Q}^+$	tập hợp các số hữu tỉ dương
$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$	dãy số Fibonacci
F_n	số Fibonacci thứ n
$(L(n))_{n\in\mathbb{N}}$	dãy Lucas
L_n	số Lucas thứ n

Mở đầu

Năm 1202 Leonardo Pisa đã giới thiệu trong cuốn sách rất nổi tiếng của mình về dãy Fibonacci, là dãy được xác định bởi công thức đệ quy $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ với điều kiện ban đầu là $F_0 = 0, F_1 = 1$. Có thể nói đây là một dãy số có quá nhiều tính chất lý thú, nó được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của khoa học và thực tế cuộc sống. Và cho đến nay nó vẫn thu hút được sự quan tâm của rất nhiều nhà toán học. Vì vậy đã có rất nhiều nhà toán học cố gắng tìm ra các mở rộng của dãy số Fibonacci. Bằng cách tạo ra những dãy số mới mà trường hợp đặc biệt của nó là dãy Fibonacci.

Thông thường có 2 cách mở rộng dãy Fibonacci: cách 1 là giữ nguyên công thức đệ quy cho số hạng thứ n của dãy và thay đổi điều kiện ban đầu, cách 2 là giữ nguyên các điều kiện ban đầu và thay đổi ràng buộc quan hệ đệ quy để tính số hạng thứ n thông qua 2 số hạng đứng trước nó, có thể phụ thuộc vào 1 hay nhiều tham số khác nhau. Và đã có rất nhiều dãy số thú vị khác được nghiên cứu: Dãy Pell, dãy Lucas, dãy k-Fibonacci...

Với mong muốn đi tìm hiểu hai mở rộng gần đây của dãy Fibonacci, tôi chọn đề tài **"Về một vài mở rộng mới của dãy Fibonacci"** làm đề tài luận văn cao học của mình. Mục tiêu của luận văn này là trình bày 2 mở rộng mới gần đây của dãy Fibonacci thông qua các tài liệu tham khảo $[1] - [3]$.

Ngoài phần mở đầu và kết luận, nội dung chính của luận văn được trình bày trong hai chương:

Chương 1. Dãy Fibonacci và một vài mở rộng của nó trước năm 1970.

1.1. Một số kiến thức chuẩn bị. Nội dung này trình bày về dãy số Fibonacci, công thức Binet, hàm sinh, tỉ số vàng...

1.2. Mở rộng của Horadam (1961).

Chương 2. Hai mở rộng mới của dãy Fibonacci.

2.1. Mở rộng mới của dãy Fibonacci của M. Edson, O. Yayenie (2009).

2.2. Mở rộng mới của dãy Fibonacci của Goksal Bilgici (2014).

Để hoàn thành bản luận văn này, tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS. TS Nông Quốc Chinh, người thầy nhiệt huyết đã truyền thụ kiến thức, đã chỉ ra hướng đề tài và tận tình hướng dẫn trong suốt quá trình làm luận văn. Đồng thời, tôi xin chân thành cảm ơn các thầy, cô phản biện đã dành thời gian đọc và đóng góp những ý kiến quý báu cho bản luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn toàn thể các thầy cô trong Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình hướng dẫn, truyền đạt kiến thức trong suốt thời gian theo học, thực hiện và hoàn thành luận văn. Qua luận văn này, tôi cũng muốn gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè đã luôn động viên, giúp đỡ tôi trong thời gian làm luận văn.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng hoàn thiện luận văn bằng tất cả sự nhiệt tình và năng lực của mình. Tuy nhiên, luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót, tôi rất mong nhận được những đóng góp quý báu của thầy cô và các bạn.

Thái Nguyên, ngày 22 tháng 10 năm 2019

Tác giả luận văn

Đinh Hồng Chinh

Chương 1

Dãy Fibonacci và một mở rộng trước năm 1970

1.1 Dãy Fibonacci

Định nghĩa 1.1.1. *Dãy số Fibonacci, ký hiệu bởi* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, được định nghĩa bởi hệ thức truy hồi sau*

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2 \tag{1.1}$$

với $F_0 = 0, F_1 = 1$.

Theo định nghĩa, ta có dãy các số Fibonacci

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...$$

Mệnh đề 1.1.2 (Công thức Binet)**.** *Với* $n \in \mathbb{Z}, \alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *và* $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$*, ta có các số Fibonacci có dạng*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}. \tag{1.2}$$

Định nghĩa 1.1.3. *Hàm sinh của dãy số vô hạn* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *là một chuỗi hình thức được xác định bởi*

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{1.3}$$

Với $|x| < 1$*, ta có một số đẳng thức thường dùng trong hàm sinh*

1. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

2. $\dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$

3. $\dfrac{1}{(1-x)^n} = 1 + nx + \dfrac{n(n+1)}{2!}x^2 + \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \dots = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \mathrm{C}_{i+n-1}^{i} x^i$ *với* $n \in \mathbb{N}$

4. $\frac{1}{1-ax} = 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + ...$

5. $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

6. $\dfrac{1}{(1-ax)^2} = 1 + 2ax + 3a^2x^2 + 4a^3x^3 + \dots$

7. $\dfrac{1}{1-x^r} = 1 + x^r + x^{2r} + x^{3r} + \dots,$ *với* $r \in \mathbb{N}^*$.

8. $\dfrac{1}{1+x^r} = 1 - x^r + x^{2r} - x^{3r} + \dots,$ *với* $r \in \mathbb{N}^*$.

Mệnh đề 1.1.4 (Công thức hàm sinh)**.** *Hàm sinh của dãy Fibonacci* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *là*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}. \tag{1.4}$$

Định nghĩa 1.1.5. *Hai đại lượng a và b có tỷ số vàng* Φ *nếu*

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \Phi. \tag{1.5}$$

Từ (1.5) suy ra

$$\Phi \times \Phi = \frac{a+b}{a} \times \frac{a}{b} = \frac{(a+b)a}{ab} = \frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \Phi + 1,$$

$$\Phi - 1 = \frac{a+b}{a} - \frac{a}{a} = \frac{b+a-a}{a} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\Phi}.$$

Vậy số Φ có tính chất đặc biệt sau

$$\Phi \times \Phi = \Phi + 1,$$

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1.$$

Nghiệm của phương trình bậc hai là

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887\dots$$

Số Φ còn "đẹp" theo hai cách sau

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots\ldots}}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}}.$$

Số Φ như trên lại rất giống với kết quả khi chia bất kì con số liên tiếp nào trong dãy Fibonacci cho nhau (ví dụ 5/3=1,666; 13/8=1,625).

Chúng ta cũng biết rằng tỷ lệ vàng xuất hiện rất nhiều trong tự nhiên và trong các lĩnh vực của đời sống.

Tiếp theo chúng tôi trình bày một số dãy số và các tính chất của chúng, các kết quả này được sử dụng trong các chứng minh ở phần sau.

Định nghĩa 1.1.6. *Dãy số Lucas, ký hiệu bởi $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, được định nghĩa bởi hệ thức truy hồi sau*

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 2 \tag{1.6}$$

với điều kiện ban đầu $L_0 = 2, L_1 = 1$.

Mệnh đề 1.1.7 (Công thức Binet cho dãy Lucas)**.** *Ta có các số hạng của dãy Lucas $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là*

$$L_n = \left(1+\sqrt{5}\right)^n + \left(1-\sqrt{5}\right)^n. \tag{1.7}$$

Mệnh đề 1.1.8 (Công thức hàm sinh của dãy Lucas)**.** *Ta có hàm sinh của dãy Lucas $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là*

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2}. \tag{1.8}$$

Định nghĩa 1.1.9. *Dãy số Pell và dãy Pell-Lucas được ký hiệu lần lượt là $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Trong đó*

Các số Pell thỏa mãn hệ thức truy hồi

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \tag{1.9}$$

với điều kiện ban đầu $P_0 = 0, P_1 = 1$.

Các số Pell-Lucas thỏa mãn hệ thức truy hồi

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2} \tag{1.10}$$

với điều kiện ban đầu $Q_0 = 2, Q_1 = 2$.

Mệnh đề 1.1.10 (Công thức Binet)**.** *Công thức Binet cho các số Pell và Pell-Lucas lần lượt là*

$$P_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \tag{1.11}$$

và

$$Q_n = (1+\sqrt{2})^n + (1+\sqrt{2})^n \tag{1.12}$$

trong đó $1+\sqrt{2}$ *và* $1-\sqrt{2}$ *là các nghiệm của phương trình* $x^2-2x-1=0$*. Và nghiệm dương* $1+\sqrt{2}$ *được biết đến là " tỷ số bạc".*

Mệnh đề 1.1.11 (Công thức hàm sinh)**.** *Hàm sinh của dãy Pell và dãy Pell-Lucas lần lượt là*

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n = \frac{x}{1-2x-x^2} \tag{1.13}$$

và

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n = \frac{2-2x}{1-2x-x^2}. \tag{1.14}$$